

МЕХАНИКА

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Т.Т.АББАСОВА, Р.Ю.АМЕНЗАДЕ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА

Институт Прикладной Математики БГУ

В работе исследуется выпучивание упругой цилиндрической оболочки при ползучести под действием равномерного бокового сжатия. Считая оболочку достаточно длинной и пренебрегая влиянием закреплений, поставленная задача сводится к рассмотрению потери несущей способности сжатого силой $q = \text{const}$ кольца.

Решение проводится с помощью вариационного метода смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца. Численно выявлена приемлемость различных геометрически нелинейных теорий в зависимости от действующих нагрузок, числа волн в окружном направлении и показателя нелинейности ползучести.

1. Введем в рассмотрение круговое кольцо радиуса R и толщиной $2h$. Обозначим через v и w соответственно перемещение в окружном направлении и прогиб. В основу предлагаемой здесь теории сжатых колец ставятся следующие предположения [1]:

а) в процессе выпучивания учитывается одновременно нелинейность по v и w ;

б) пренебрегая касательным перемещением, ограничиваемся нелинейностью только прогиба;

в) при $v \approx 0$, считается справедливым выполнение неравенства $w/R \ll 1$;

г) потеря устойчивости происходит в плоскости кольца;

д) нормальное напряжение σ по толщине кольца меняется по линейному закону [2].

Принимая гипотезу а) и учитывая, что $\dot{q} = 0$, используемый функционал [3] в полярных координатах (φ, z) записывается следующим образом:

$$J_a = R \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \dot{w} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \dot{\sigma} (\varepsilon^\Phi + 2\dot{p}) \right\} dz d\varphi. \quad (1.1)$$

Здесь

$$\dot{p} = B\sigma^m,$$

где m - показатель нелинейности, а B - коэффициент ползучести. Точкой обозначается дифференцирование по физическому времени t . Деформация ε в рамках гипотезы плоских сечений определяется согласно формулам теории тонких оболочек [1]

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right] - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) z. \quad (1.2)$$

Уравнение состояния запишем посредством закона Гука

$$\varepsilon^\Phi = \frac{\sigma}{E} \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon}^\Phi = \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad (1.3)$$

где E - модуль упругости.

Для случаев б) и в) выражения соответствующих функционалов приводятся к виду:

$$J_b = R \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right)^2 + \dot{w}^2 \right] - \frac{1}{2} \dot{\sigma} (\dot{\varepsilon}^\Phi + 2\dot{p}) \right\} dz d\varphi \quad (1.4)$$

при

$$\varepsilon = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + w^2 \right] - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} z \quad (1.5)$$

и

$$J_v = R \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \dot{\sigma} (\dot{\varepsilon}^\Phi + 2\dot{p}) \right\} dz d\varphi, \quad (1.6)$$

при

$$\varepsilon = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} z. \quad (1.7)$$

2. Прежде всего, рассмотрим вариант полной нелинейности. Для этого применим метод Релея-Ритца и интерполяционные функции определим выражениями:

$$w = w_0(t) + w_1(t) \cos l\varphi; \quad v = v_0(t) \sin l\varphi. \quad (2.1)$$

Отметим, что число волн l принимает четные значения. Распределение напряжения по толщине кольца, согласно д) запишем линейным образом:

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} + m(t) \left(\frac{z}{h} \right) \cos l\varphi. \quad (2.2)$$

Дальнейший ход вычислений состоит в том, что соотношения (1.2), (1.3), (2.1) и (2.2) подставляются в выражение (1.1) и функционал J_a находится как функция W_0, W_1, V_0, m и производных этих параметров по t . Затем J_a варьируется по $\dot{W}_0, \dot{W}_1, \dot{V}_0$ и \dot{m} , в результате чего получается система четырех уравнений. Опуская промежуточные выкладки, приведем эти уравнения

$$\begin{aligned}
 & -2\pi q \dot{W}_0 = 0 \\
 & \frac{2h^2 l^2}{3R} \dot{m} - q(l^2 + 1) \dot{W}_1 - 2ql \dot{V}_0 = 0 \\
 & \frac{2h^2 l}{3R} \dot{m} - q(l^2 + 1) \dot{V}_0 - 2ql \dot{W}_1 = 0 \quad (2.3) \\
 & \frac{2h^2 l^2}{3R} \dot{W}_1 + \frac{2h^2 l}{3R} \dot{V}_0 - \frac{2}{3} R h \dot{m} - \sum_{p=0}^m B \frac{C_m^p (-1)^{m-p} q^{m-p} R^{m-p+1} h^{p-m+1}}{2^{m-p} (p+2)} \times \\
 & \quad \times [1 - (-1)^{p+2}] m^p K_p = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 & C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}, \text{ а} \\
 & L_p = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (p+1)} \quad (p = 1, 3, 5, \dots).
 \end{aligned}$$

Наша последующая задача состоит из вычисления неизвестных функциональных аргументов. Для этого систему уравнений (2.3) необходимо дополнить начальными условиями

$$m(0) = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad w_1(0) = w_1^0 \cos l\varphi, \quad (2.4)$$

Величина w_1^0 представляет собою значение параметра немедленно после приложения нагрузки. Из второго и третьего уравнений имеем:

$$\dot{m} = qR \frac{l^2 - 1}{l^2} \dot{W}_1, \quad \dot{V}_0 = -\frac{1}{l} \dot{W}_1, \quad (2.5)$$

или выполнив интегрирование при условиях (2.4), получим:

$$m = qR \frac{l^2 - 1}{l^2} W_1, \quad v_0 = -\frac{1}{l} W_1. \quad (2.6)$$

Комбинируя теперь (2.5), (2.6) и последнее уравнение системы (2.3), приходим к следующему нелинейному дифференциальному уравнению относительно \dot{W}_1 .

$$\dot{w}_1 = \left\{ \sum_{p=0}^m B \frac{C_m^p (-1)^{m-p} q^m R^{m+2} 3^p [1 - (-1)^{p+2}] \left[\frac{l^2 - 1}{l^2} \right]^p w_1^p L_p}{2^m (p+2) h^{p+m+1}} \right\} \times \left\{ 0,67(l^2 - 1) - \frac{R^3 q (l^2 - 1)}{h^3 l^2} \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

Аналогично можно получить дифференциальные уравнения для случаев б) и в). Они имеют вид:

$$\dot{w}_1 = \left\{ \sum_{p=0}^m B \frac{C_m^p (-1)^{m-p} q^m R^{m+2} 3^p [1 - (-1)^{p+2}] \left[\frac{l^2 + 1}{l^2} \right]^p w_1^p L_p}{2^m (p+2) h^{p+m+1}} \right\} \times \left\{ 0,67l^2 - \frac{R^3 q (l^2 + 1)}{h^3 l^2} \right\}^{-1}, \quad (2.8)$$

$$\dot{w}_1 = \left\{ \sum_{p=0}^m B \frac{C_m^p (-1)^{m-p} q^m R^{m+2} 3^p [1 - (-1)^{p+2}] w_1^p L_p}{2^m (p+2) h^{p+m+1}} \right\} \cdot \left\{ 0,67l^2 - \frac{R^3 q}{h^3} \right\}^{-1}. \quad (2.9)$$

Введя безразмерные величины соотношениями

$$a = \frac{w_1}{h}, \quad \xi = \frac{h}{R}, \quad \tau = q_0^m B t, \quad \omega = \frac{q}{q_0},$$

в которых величину q_0 определим впоследствии, уравнения (2.7)-(2.9) запишем в следующей форме:

$$\frac{d\tau}{da} = (l^2 - 1) [1 - 0,26\omega] \times \left\{ \xi^{-(m+2)} 2^{-(m+1)} \omega^m \sum_{p=0}^m \frac{[1 - (-1)^{p+2}]}{p+2} C_m^p (-1)^{m-p} 3^{p+1} \left[\frac{l^2 - 1}{l^2} \right]^p a^p L_p \right\}^{-1} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\tau}{da} = [l^2 - 0,26(l^2 + 1)\omega] \times \left\{ \xi^{-(m+2)} 2^{-(m+1)} \omega^m \sum_{p=0}^m \frac{[1 - (-1)^{p+2}]}{p+2} C_m^p (-1)^{m-p} 3^{p+1} \left[\frac{l^2 + 1}{l^2} \right]^p a^p L_p \right\}^{-1} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\tau}{da} = [1^2(1-0,26\omega)] \times \left\{ \xi^{-(m+2)} 2^{-(m+1)} \omega^m \sum_{p=0}^m \frac{[1-(-1)^{p+2}]}{p+2} C_m^p (-1)^{m-p} 3^{p+1} a^p L_p \right\}^{-1} \quad (2.12)$$

В них переход к безразмерному дифференцированию осуществляется по правилу

$$\frac{d}{dt} = q_0^m \mathbf{B} \frac{d}{d\tau}.$$

Так как мгновенная деформация упруга, то для определения искомого параметра естественно применить вариационный метод [1], задавшись тем же предположительным распределением напряжений и перемещений, что и при анализе ползучести, то есть, представив \mathcal{W} и $\mathcal{\sigma}$ формулами (2.1), (2.2). Функционалы для случаев а), б) и в) принимают в упругом случае следующий вид:

$$I_a = \mathbf{R} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\mathbf{R}^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} - \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \dot{w} \right)^2 \right] - \frac{1}{2\mathbf{E}} \dot{\sigma}^2 \right\} dz d\varphi + \mathbf{R} \int_0^{2\pi} \dot{w} d\varphi, \quad (2.13)$$

$$I_b = \mathbf{R} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\mathbf{R}^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right)^2 + \dot{w}^2 \right] - \frac{1}{2\mathbf{E}} \dot{\sigma}^2 \right\} dz d\varphi + \mathbf{R} \int_0^{2\pi} \dot{w} d\varphi, \quad (2.14)$$

$$I_v = \mathbf{R} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\mathbf{R}^2} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{2\mathbf{E}} \dot{\sigma}^2 \right\} dz d\varphi + \mathbf{R} \int_0^{2\pi} \dot{w} d\varphi, \quad (2.15)$$

Отметим, что здесь, в отличие от формул (2.1) и (2.2) искомые параметры зависят от q , а под точкой понимается дифференцирование по q . Вычисляя функционалы (2.13)-(2.15) и варьируя их по \dot{w}_0 , \dot{w}_1 , \dot{v}_0 , \dot{m} , после известной процедуры [1] приходим к следующим уравнениям для q :

$$\frac{dq_a}{da} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1^2 \xi^3 - 1,5q_a}{1,5}, \quad \frac{dq_b}{da} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1,331^2 \xi^3 - 2,5q_b}{2,5}, \quad (2.16)$$

$$\frac{dq_v}{da} = \frac{1}{a} \cdot \frac{0,671^2 \xi^3 - 4q_v}{4}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$q_{a)kr} = 0,671^2 \xi^3 E, \quad q_{b)kr} = 0,531^2 \xi^3 E, \quad q_{v)kr} = 0,171^2 \xi^3 E.$$

Обозначив через q_0 наименьшую из вышеприведенных критических сил, т.е. $q_0 = 0,171^2 \xi^3 E$, после элементарных преобразований из (2.16) будем иметь:

$$\frac{d\omega}{da} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1-0,26\omega}{0,26}, \quad \frac{d\omega}{da} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1,33-0,43\omega}{0,43}, \quad \frac{d\omega}{da} = \frac{1}{a} \cdot (1-\omega).$$

Рассмотрение вопроса о выпучивании при ползучести имеет смысл, когда $\omega < 1$. Теперь проинтегрируем эти уравнения при условии, что для всех трех нелинейных теорий имеем начальное несовершенство a_0 . Тогда для дополнительного прогиба соответственно имеем:

$$a_a = a_0 \frac{1}{3,85 - \omega}, \quad a_b = a_0 \frac{1}{3,1 - \omega}, \quad a_v = a_0 \frac{1}{1 - \omega}.$$

Уравнения (2.10)-(2.12) должны быть проинтегрированы при этих начальных условиях. В таблице 1 даны эти значения в зависимости от ω , когда $a_0 = 10^{-1}$.

Таблица 1.

ω	a_a	a_b	a_v
0,10	0,02667	0,03333	0,11111
0,11	0,02674	0,03344	0,11236
0,12	0,02681	0,03356	0,11364
0,13	0,02688	0,03367	0,11494
0,14	0,02695	0,03378	0,11628
0,15	0,02703	0,03390	0,11765

3. Для численной реализации примем $\xi = 10^{-1}$. Показатель нелинейности m оказывается довольно большим. Для сталей он колеблется от $m = 3$ до $m = 8$ [3]. Поэтому далее приведем уравнения (2.10)-(2.12) в случаях $m = 3$ и $m = 5$.

При $m = 3$

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{1}{a} \cdot \left[1^2 (1 - 0,26\omega) \right] \left\{ \omega^3 \xi^{-5} \left[1,13 + 1,52 \left(\frac{1^2 - 1}{1^2} \right)^2 a^2 \right] \right\}^{-1},$$

для первой геометрически нелинейной теории

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{1}{a} \cdot [l^2 - 0,26(l^2 + 1)\omega] \left\{ \omega^3 \xi^{-5} \left(\frac{l^2 + 1}{l^2} \right) \left[1,13 + 1,52 \left(\frac{l^2 + 1}{l^2} \right)^2 a^2 \right] \right\}^{-1},$$

для второй теории

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{1}{a} \cdot [l^2 (1 - 0,26\omega)] \left\{ \omega^3 \xi^{-5} [1,13 + 1,52a^2] \right\}^{-1},$$

для третьей теории.

При $m = 5$

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{1}{a} \cdot [l^2 (1 - 0,26\omega)] \left\{ \omega^5 \xi^{-7} \left[0,47 + 3,8 \left(\frac{l^2 - 1}{l^2} \right)^2 a^2 + 2,03 \left(\frac{l^2 - 1}{l^2} \right)^4 a^4 \right] \right\}^{-1},$$

для первой геометрически нелинейной теории

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{1}{a} \cdot [l^2 - 0,26(l^2 + 1)\omega] \times$$

$$\times \left\{ \omega^5 \xi^{-7} \left(\frac{l^2 + 1}{l^2} \right) \left[0,47 + 3,8 \left(\frac{l^2 + 1}{l^2} \right)^2 a^2 + 2,03 \left(\frac{l^2 + 1}{l^2} \right)^4 a^4 \right] \right\}^{-1},$$

для второй теории

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{1}{a} \cdot [l^2 (1 - 0,26\omega)] \left\{ \omega^5 \xi^{-7} [0,47 + 3,8a^2 + 2,03a^4] \right\}^{-1},$$

для третьей теории.

Последующая задача состоит в численном интегрировании полученных уравнений, которое осуществляется методом Рунге-Кутты.

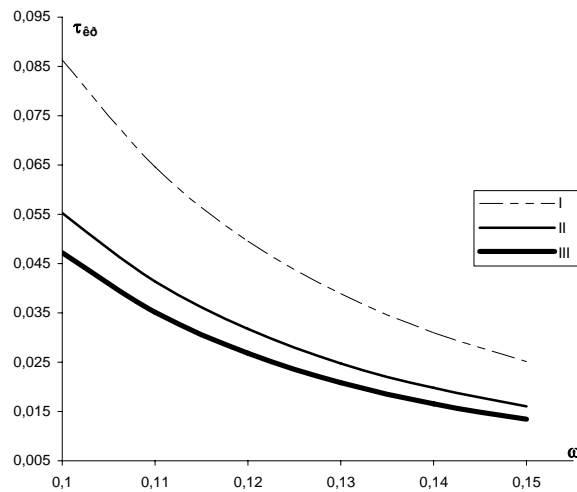


Рис.1. Зависимость $\tau_{кр}$ от ω при $m = 3, l = 2$.

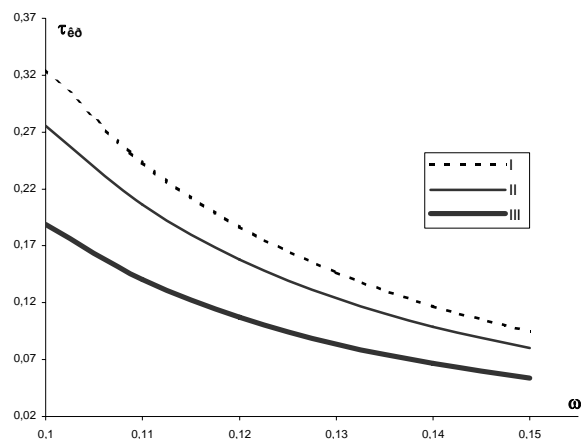


Рис. 2. Зависимость $\tau_{кр}$ от ω при $m = 3, l = 4$.

На основании полученных численных расчетов (рис. 1-6) можно сформулировать следующие выводы:

- с увеличением показателя нелинейности величина критического времени увеличивается;
- с возрастанием числа волнообразования l критическое время также увеличивается;
- как и следовало ожидать, с увеличением мгновенно приложенной силы ω критическое время уменьшается;

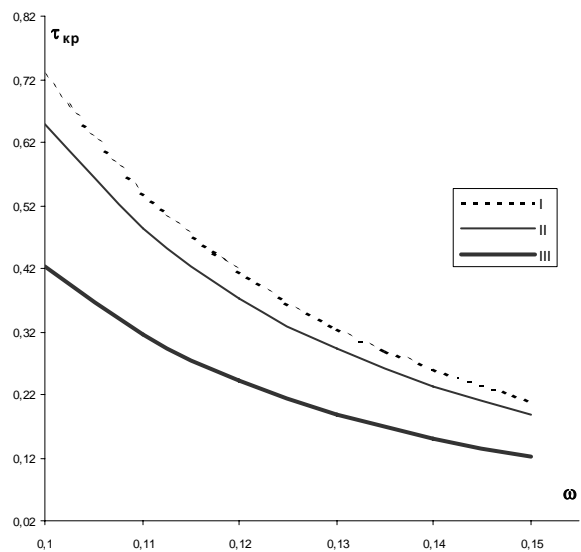


Рис.3. Зависимость $\tau_{кр}$ от ω при $m = 3, l = 6$.

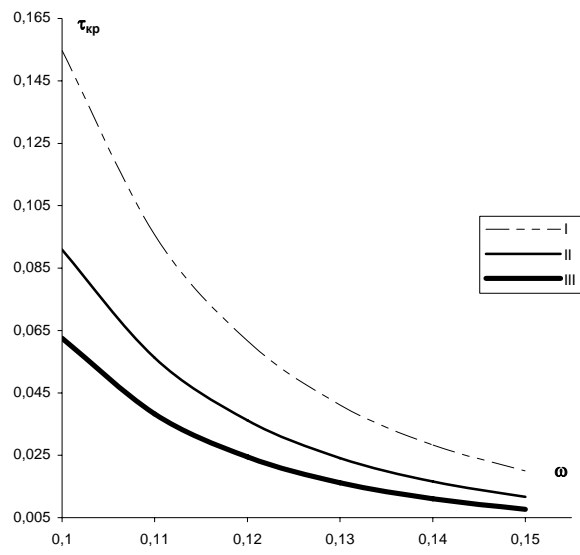


Рис. 4. Зависимость $\tau_{кр}$ от ω при $m = 5, l = 2$.

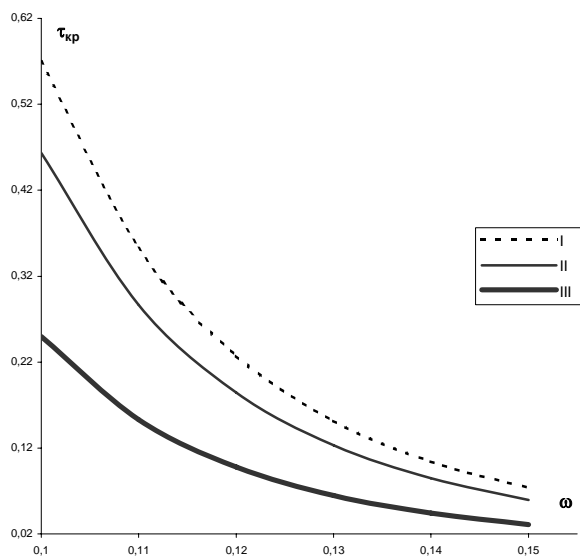


Рис. 5. Зависимость $\tau_{кр}$ от ω при $m = 5, l = 4$.

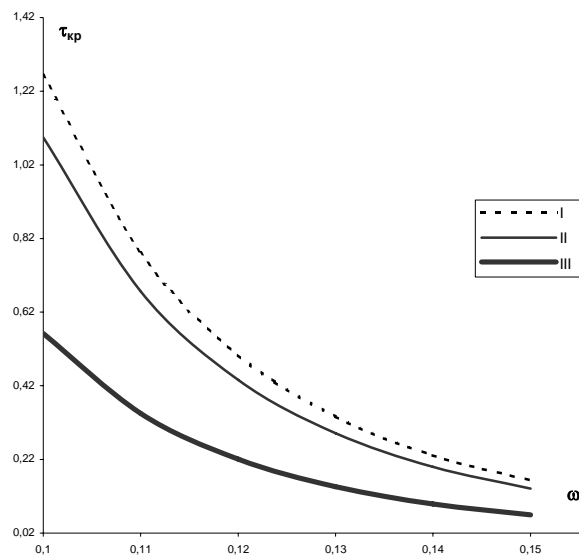


Рис. 6. Зависимость $\tau_{кр}$ от ω при $m = 5, l = 6$.

• с увеличением ω разница значений величин критического времени между различными геометрически нелинейными теориями значительно уменьшается.

В заключении, необходимо заметить, что при прочих равных условиях учет полной нелинейности позволяет наиболее рационально использовать несущую способность кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание длинной цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала. Механика оболочек и пластин. Сборник докладов XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (17-19 сентября 2002г.). Из-во Нижегородского Госуниверситета, Нижний Новгород, 2002, с. 87-93.
2. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней. ДАН Азербайджана, 2000, №4-6, с. 72-77.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Из-во «Наука» М, 1966, с.752.

**SÜRTÜNMƏ ZAMANI UZUN SİLİNDRİK ELASTİKİ ÖRTÜYÜN
SON HƏDD VƏZİYYƏTİ**

T.T.ABBASOVA, R.Y.ƏMƏNZADƏ, L.F.FƏTULLAYEVA

ANNOTASIYA

Təqdim olunan işdə yan tərəfdən müntəzəm sıxılmaya məruz qalmış elastiki silindrik örtüyün sürtünmə zamanı qabarma məsələsi tədqiq olunur. Örtüyü kifayət qədər uzun hesab etsək və bağlanmasının təsirini nəzərə almasaq, baxılan məsələ $q = \text{const}$ qüvvəsi ilə sıxılan halqanın əsas xassələrinin itməsinin araşdırılmasına gətirilir.

Məsələ Rele-Rits üsulunun köməyi ilə qarışıq tipli variasiya üsulu vasitəsilə həll olunur. Ədədi olaraq müxtəlif həndəsi qeyri-xətti nəzəriyyələrin, dairəvi istiqamətli dalğaların sayının və sürtünmənin qeyri-xəttilik əmsalının böhran zamana təsiri aydınlaşdırılmışdır.

**THE BOUNDARY STATE OF THE LONG CYLINDRICAL
ELASTIC CASING AT THE CRAWL**

T.T.ABBASOVA, R.Yu.AMENZADEH, L.F.FATULLAEVA

ABSTRACT

The paper is devoted to the investigation of process of buckling of the elastic cylindrical casing at the crawl under the action of uniform side pressure. Including an environment it is enough long and neglecting influence of fastenings, the given problem is reduced to consideration of loss of bearing ability compressed by force $q = \text{const}$ rings.

For the solution of the given problems there is used variation method of mixed type in combination with Rele-Ritz method. Numerically there is revealed the acceptability of the various geometrically nonlinear theories, the number of waves in a district direction and the parameter of non-linearity of the crawl on the critical force.